MASTER METIERS DE L'ÉDUCATION, DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA FORMATION	
Mention	**Parcours**
Second degré	Physique-Chimie
Site de formation :	**Rangueil**

MÉMOIRE

Les fonctions liées à la modélisation : Exemple de l'importance de l'interdisciplinarité mathématiques physique-chimie

Axel GUILLERMIN

Directeur de mémoire	**Co-directrice de mémoire**
Nicolas HERVÉ (MCF didactique des sciences, ENSFEA)	**Marie-Hélène LECUREUX** (PrAg Mathématiques INSPÉ)
Membres du jury de soutenance : (en précisant le statut)	
- - -	
Soutenu le 15/06/2021	

I. Introduction

J'ai choisi ce sujet de mémoire pour plusieurs raisons. Tout d'abord, en tant qu'élève, j'ai toujours eu bien plus de difficultés en mathématiques qu'en physique, bien qu'ayant conscience de l'imbrication de certaines notions mathématiques en physique et en chimie. Ma compréhension des outils mathématiques s'est souvent faite *a posteriori*, au fur et à mesure que ma maîtrise des sciences physiques progressait. De cette façon, je me suis surpris moi-même à accorder un intérêt manifeste pour les mathématiques ; pas au point de me réorienter dans un parcours plus mathématique, mais suffisamment pour me découvrir une réelle envie d'aider, à mon tour, les élèves que j'aurai devant moi en mathématiques, tout autant qu'en physique, de façon à démystifier la/les matière(s). J'en arrive ainsi à la deuxième raison du choix de mon sujet. Étant étudiant en licence, j'ai notamment accompagné un lycéen en cours particuliers pendant deux ans, de sa 2nde à sa 1ère STL. Je lui dispensais aussi bien des cours de mathématiques que de physique ou de chimie selon les besoins. Au demeurant, cette délimitation ne présentait de réalité que pour ses parents et lui, puisque je faisais systématiquement le lien entre mathématiques et sciences physiques. Le lien fait, servait à étouffer les questions telles que « ça sert à quoi ça ? ». Typiquement, pour les fonctions, dont il sera question dans ce mémoire, j'ai pris l'exemple de la conquête spatiale et les alunissages qui, sans les mathématiques et les fonctions, ne seraient même pas envisagés.

II. Analyses préalables

a. Mise en situation

« En physique, l'usage d'expressions mathématiques est complexe, parce que la signification physique auxiliaire des symboles est utilisée pour transmettre des informations omises de la structure mathématique de l'équation. C'est parce que nous avons un but différent pour les mathématiques : modéliser des systèmes physiques réels.» (Redish & Kuo, 2015)

REDISH et KUO font également référence au schibboleth[1] de Corinne pour mettre en relief les différences de notation et de précautions prises entre les enseignants de mathématiques et de physique. Il apparaît notamment que pour les physiciens, chaque symbole, chaque variable est associée d'une façon ou d'une autre à une grandeur, ou plus largement à un phénomène physique, alors que les notations au sens mathématique du terme servent davantage à éclaircir ou aérer leurs problèmes et équations, au moins dans un premier temps et traitent donc le problème brut. Le lien entre les mathématiques et les sciences physiques est, selon mes analyses que je vais détailler par la suite, la notion de modélisation. La physique se sert des mathématiques pour modéliser le monde qui nous entoure. Mon mémoire se concentrera donc sur cette notion de modélisation.

[1] Un shibboleth représente un signe de reconnaissance verbal. Durant la Première Guerre mondiale, les Alsaciens eurent leur shibboleth entre *« Regenshirm »* et *« Schirm »* contre *« barabli »* contre les Allemands pour désigner un parapluie.

b. Exemples de discordances identifiées entre les pratiques de mathématiques et les pratiques de physique-chimie

1) Proportionnalité

Une des discordances que j'ai rapidement identifiées se trouve dans la notion de proportionnalité. Durant mon stage de M2B, j'ai assisté à une évaluation posée par ma tutrice sur la loi d'Ohm. Une des questions de l'évaluation se posait en ces termes :

« Pourquoi peut-on dire que l'intensité du courant I est proportionnelle à la tension U ? »

, ce à quoi était juxtaposé un graphe représentant une série de valeurs de courant en fonction des valeurs associées du courant électrique. L'enseignante avait même tracé la modélisation par régression linéaire de telle façon à ce que $U = f(I)$ soit de la forme $y =$

ax où a représentait la valeur de résistance du circuit à relever dans la question qui suivait. Pour ma tutrice et moi-même, faisant valoir des exigences d'enseignants de physique-chimie, cette question, liée à la proportionnalité, ne devait pas poser de problème. En effet, il avait été régulièrement martelé en cours que, si la droite qui représente l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre, passe par un maximum de points et par l'origine du repère, alors les deux grandeurs sont proportionnelles. Notre *a priori* sur la difficulté de la question était d'autant plus étayée que la question elle-même suggérait que les deux grandeurs étaient proportionnelles. Nous avons donc été surpris de constater à la correction qu'une proportion non-négligeable d'élèves avait écrit que les grandeurs tension et courant n'étaient pas proportionnelles dans l'exemple donné puisque « tous les points ne sont pas exactement sur la droite tracée ». Il nous a semblé que le biais de raisonnement provenait des cours de mathématiques. Cette supposition a été confirmée après discussion avec l'enseignant de la classe concernée. En effet, en mathématiques, c'est clair. Si tous les points sont (parfaitement) alignés sur une droite passant par l'origine, alors il y a proportionnalité. En physique, c'est un peu moins clair. En tous cas, il y a davantage de sous-entendus pas toujours explicités. Pour les physiciens, il faut que la répartition des points puisse être associée à une modélisation de droite passant par l'origine. Les écarts au modèle linéaire sont généralement mis sur les incertitudes, sans que celles-ci soient véritablement expliquées.

2) Extremum local

Je me dois de préciser que je n'ai pas pu observer cette dissonance en cours parce que le chapitre qui s'y prêterait, la mécanique du point matériel, n'a lieu qu'en fin d'année. En cours de physique, lorsqu'un enseignant attend qu'un élève détermine le maximum ou le minimum d'une fonction (Typiquement, si l'on veut calculer la *flèche*, c'est-à-dire le point culminant d'une trajectoire $y(x)$ en mécanique du point matériel), il attend que l'élève cherche pour quelle valeur de variable, la dérivée s'annule. Dans le cas du calcul de la *flèche*, l'élève aura obtenu au préalable l'équation horaire du mouvement de chute libre où l'expression de celle-ci est une fonction de l'altitude z ou y, selon le repère utilisé, en fonction du temps t. L'élève devra par suite chercher le temps t_{fleche} pour lequel l'expression de la dérivée z' ou y' (donc la vitesse) s'annule. Comme les trajectoires étudiées au lycée sont systématiquement au plus paraboliques, la notion d'extremum local est claire dans le contexte étudié.

En cours de mathématiques, toutes les fonctions étudiées ne sont pas des paraboles…

Cela implique de se poser davantage de questions quant aux propriétés de ladite fonction et de sa dérivée. Il faut montrer que la fonction est dérivable sur l'intervalle étudié d'une part et chercher la valeur de x telle que la dérivée change de signe. En effet, pour une fonction quelconque, le fait que la dérivée s'annule ne suffit pas à justifier que nous sommes en présence d'un extremum local. Prenons l'exemple de la fonction mathématique suivante :

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

On trouvera facilement que la dérivée a pour expression :

$$f'(x) = 12x^2(x - 1)$$

Il vient amors immédiatement que l'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

En traçant la courbe représentative de $f'(x)$ on voit qu'en x=0, la dérivée ne change pas de signe. Il ne s'agit donc pas d'un minimum local, mais d'un point d'inflexion. Par contre, pour x=1, la dérivée change de signe, donc f admet un minimum local ici. Cette différence de précautions mathématiques est due aux contextes physiques étudiés. Le contrat didactique implicite fait qu'en physique, l'élève serait guidé progressivement si le problème étudié nécessite plus de « réflexion » que d'ordinaire.

3) Modélisation trop rapide

Bien que l'intention initiale (partir de situations concrètes de la vie de tous les jours pour introduire une notion mathématique telle que les fonctions affines et linéaires) soit très charitable, il faut admettre que, généralement, les méthodes pédagogiques qui en découlent sont imparfaites et que le formalisme mathématique $f(x) = \cdots$ intervient souvent de façon un peu trop abrupte. En effet, l'idée du professeur de mathématiques est trop rapidement de se raccrocher au formalisme. C'est ainsi que, pour un exemple d'élongation de ressort[2] en fonction de la masse qui y est suspendue, la masse est trop vite notée x et l'élongation trop vite notée $f(x)$ ce qui grille potentiellement une étape d'appropriation du problème et du formalisme mathématique pour les élèves. Peut-être est-il donc nécessaire d'expliciter cette étape, par exemple :

$$\varepsilon = a \times m \Longrightarrow \varepsilon(m) = a \times m \Leftrightarrow f(x) = a \times x \Leftrightarrow f(x) = ax$$

III. Cadre théorique

a. Notations

Les différences de notations (ou ostensifs) d'un cours à l'autre ou même d'un enseignant à l'autre sont souvent passées sous silence de façon totalement involontaire puisqu'utilisée par simple(s) habitude(s) de l'enseignant en question. Ces dissemblances peuvent passer inaperçues.

[2] (MENESR/DGESO, 2014)

1) Fonction(s) et variable(s) associée(s)

En reprenant l'exemple de la chute libre vu plus haut, d'un point de vue d'enseignement de physique-chimie, on obtient classiquement d'une part une équation horaire

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_{0z}t$$

Et d'autre part une équation de trajectoire : $z(x) = -\frac{gx^2}{2v_{0x}^2} + \frac{v_{0z}x}{v_{0x}}$

Cela n'engendre aucun problème, pour un physicien d'attribuer la même lettre z à ces deux fonctions. Pourtant, mathématiquement, il s'agit de 2 fonctions distinctes :

$$x \longmapsto z(x) \quad t \longmapsto z(t)$$

Dans l'absolu, les deux fonctions dont il est question ne sont même pas de même nature. Le cas ici est particulier puisqu'il se trouve que la variable x dépend linéairement de l'autre variable t. De ce fait, il serait inacceptable pour un mathématicien de nommer ces deux fonctions z. Il conviendrait alors d'associer la grandeur altitude z à deux fonctions distinctes $f(x)$ et $g(t)$.

Ce potentiel obstacle didactique est omnipotent. Dans les études supérieures, en thermodynamique tout particulièrement, lorsque l'on parle d'entropie par exemple, un physicien n'éprouvera aucun scrupule à changer de jeu de variables et ainsi traiter tantôt la fonction $S(T, P)$, $S(P, V)$ ou $S(T, V)$. La troisième variable est donc toujours prise comme constante, de façon plus ou moins explicite. On va voir que cette diversité de notation pour les fonctions n'est que la partie immergée de l'iceberg.

2) Dérivées et dérivées partielles

Historiquement, il existe trois notations pour les dérivées pour la fonction notée

$x = f(t)$ ou $x(t)$.

(1) $f' : t \longmapsto f'(t)$

(2) $\frac{dx}{dt} \quad dx = x(t + dt) - x(t)$

(3) $\dot{x} \Leftrightarrow v(t) = \frac{dx}{dt}$

La notation (1) est la notation de Lagrange. Elle est très usitée en cours de mathématiques étant donné que l'on étudie majoritairement des fonctions f sans dimension et que cette notation est assez « légère » visuellement.

La notation (2) est la notation de Leibniz. Si on établit le parallèle entre Lagrange et Leibniz pour une fonction f qui relie x et t telle que $x = f(t)$ alors $dx = f'(t)dt$ ou bien $f'(t) = \frac{dx}{dt}$.

La notation de Leibniz est chérie par les physiciens puisqu'elle explicite directement la grandeur physique dérivée et la grandeur physique variable.

La notation (3) est la notation de Newton. Le point au-dessus de la variable dérivée indique que celle-ci est dérivée une fois par rapport au temps. Cela permet de gagner en rapidité dans les résolutions d'équation, par exemple en dynamique du point ou du solide.
Comme dit plus haut, la notation de Leibniz permet de lever l'ambiguïté sur la variable. On sait immédiatement quelle grandeur est dérivée par rapport à quelle autre. Cette notation permet aussi, par exemple de démontrer très rapidement la formule des dérivées composées. En effet si on note $z = g(y)$ et $y = f(x)$, alors avec la notation de Lagrange, on a :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

ce qui, avec la notation de Leibniz devient :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$$

Ici, tout se passe comme s'il suffisait de *« simplifier par dy »* pour ne pas tenir compte de la variation infinitésimale de y. C'est un moyen mnémotechnique redoutable, tout en étant une démonstration résolument irrecevable mathématiquement.

Ça se complique un peu lorsque l'on considère des dérivées partielles. Soit une fonction

f à plusieurs variables x, y, z, t. On peut noter la dérivée de f par rapport à x de plusieurs façons :

(4) $\frac{\partial f}{\partial x}$

(5) $f'(x, y, z, t)$

(6) $\partial_1 f$

La notation (4) est largement préférée, que ce soit en mathématiques ou en physique. Dans un domaine de la physique tel que l'électromagnétisme, cette notation ne suscite aucune difficulté puisque les variables sont toujours spatio-temporelles (x, y, z, t). Par contre, si on reprend l'exemple de l'entropie en thermodynamique, ça s'obscurcit un peu. Prenons la fonction entropie S définie en variables température T et volume V : $S(T, V)$. Auquel cas, on travaille déjà en milieu isobare ($P = cte$). Si l'on souhaite exprimer la dérivée de S par rapport à T, il faut alourdir un peu la notation de la façon suivante, de sorte que toutes les informations concernant les grandeurs variables soient considérées:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V$$

Au final, au crayon d'un physicien, pour la fonction $S(T, V)$, les deux dérivées partielles s'écrivent :

$$\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V \quad \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T$$

Un mathématicien, lui, prendra le temps d'introduire $S = f(T, V)$. La notation des dérivées partielles est donc plus concise :

$$\frac{\partial f}{\partial T} \quad \frac{\partial f}{\partial V}$$

Si l'envie prend au mathématicien et au physicien d'étudier les dérivées partielles de la fonction entropie S définie en variables pression P et volume V : $S(P, V)$, alors le physicien notera

$$\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_V \quad \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_P$$

alors que le mathématicien introduira $S = g(P, V)$ et notera :

$$\frac{\partial g}{\partial P} \quad \frac{\partial g}{\partial V}$$

b.Notations de la modélisation[3]

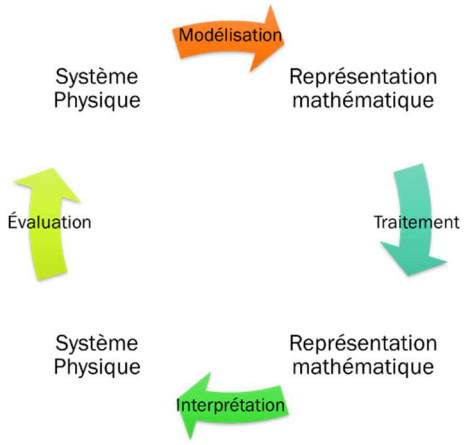


Figure 1 : Un modèle de modélisation mathématique...

Avant toute chose, on désigne certains aspects d'un système physique particulier que l'on souhaite décrire. On identifie par la suite des *mesurandes*, des variables et des paramètres que l'on peut quantifier (du moins en théorie… pas toujours en pratique). On détermine alors quelle structure(s) mathématique(s) est/sont appropriée(s) pour décrire les caractéristiques qui nous intéressent. Par la suite, on modélise le système physique en incorporant ces mesures dans des symboles mathématiques et en exprimant les relations entre les quantités mesurées en opérations entre les symboles mathématiques. À partir de la structure mathématique, on a des règles et des méthodologies pour transformer les relations et résoudre les équations. On peut ainsi traiter les mathématiques pour résoudre des problèmes qui mènent à des réponses que nous n'étions pas capables de voir directement à partir de nos compréhensions physiques. Cela nous laisse cependant seul face aux mathématiques. Enfin, on interprète ce que le résultat obtenu précédemment signifie rétrospectivement dans le système physique et on évalue à hauteur de quoi ce que l'on a obtenu est en accord avec notre choix originel de modèle.

[3] Redish, Kuo (2015) : *« Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology »*

IV. Premières questions et début des investigations

a. Intérêts perçus de l'interdisciplinarité mathématiques-physique-chimie

1) Définitions

Revenons donc au choix de ce sujet et sur cette idée d'interdisciplinarité. Tout d'abord, ce mot : ***interdisciplinarité***… de quoi s'agit-il réellement ? On pourra rencontrer également les termes ***pluridisciplinarité*** et ***transdisciplinarité***. Ces trois termes sont, pour le commun des mortels, très semblables, voire synonymes et commutables. Dans les faits, ces trois formules ne sont pas strictement équivalentes.

La pluridisciplinarité est un fait constatable : c'est la juxtaposition de plusieurs disciplines. La pluridisciplinarité n'est pas un choix pédagogique. Elle infère des choix pédagogiques : l'interdisciplinarité et la transdisciplinarité[4]. « […] elle est explicitée en vue d'une comparaison avec l'interdisciplinarité afin d'appuyer les limites de la pluridisciplinarité par opposition à la richesse et aux possibilités prétendument illimitées de l'interdisciplinarité. » (Colet & Mary, 1993)

L'interdisciplinarité est une démarche pédagogique conçue à partir de l'idée de décloisonnement des matières scolaires. Les matières scolaires ainsi associées participent, tout en préservant leurs spécificités, à un dessein commun en y véhiculant leurs savoir- faire et leurs méthodes. Elles coopèrent et échangent entre elles de façon à répondre aux besoins de compréhension. L'interdisciplinarité est au service des disciplines dans un souci de retombée ou d'utilité directe à court ou moyen terme dans la discipline.

« La transdisciplinarité prend ses racines dans l'interdisciplinarité, mais se veut une étape supplémentaire dans la démarche d'intégration des disciplines, celle qui consisterait à faire éclore une méta-science ou méta-discipline, avec une méthodologie et une épistémologie communes, capables de s'affronter à une pluralité de situations et de problématiques (Morin, 1983 ; Piaget, 1972). La méthode et le langage transdisciplinaire visent donc la réunification des connaissances, unification basée sur l'utilisation de concepts et de théories communs. » (Colet & Mary, 1993) Cela implique donc la consolidation et l'acquisition de compétences communes (transversales) aux disciplines associées. C'est donc là l'occasion d'utiliser les spécificités de chacune de ces disciplines pour aboutir à ces objectifs communs (compétences transversales).

Il est à noter que la pluridisciplinarité, l'interdisciplinarité et la transdisciplinarité s'harmonisent dans un raisonnement conduisant vers une meilleure imbrication des disciplines scientifiques. Ces définitions étant établies, il m'est donc désormais plus clair de parler d'interdisciplinarité mathématiques-physique-chimie dans le cadre de ce mémoire (puisque beaucoup de notions étudiées par les élèves sont en fait transdisciplinaires).

[4] Bulletin Officiel du ministère de l'Éducation Nationale et du ministère de la Recherche n°25 du 29 juin 2000

2) Pourquoi l'interdisciplinarité ?

L'interdisciplinarité apparaît à mes yeux comme une façon, assez idéale, de lisser les attentes et exigences des enseignants de mathématiques et de sciences physiques. Cela pourrait permettre plusieurs conséquences somme toute bénéfiques, à savoir déjà une meilleure maîtrise des connaissances de la part des enseignants eux-mêmes. Une fois les contenus mieux maîtrisés par les enseignants, nous serions en droit d'espérer davantage d'adaptations réciproques des deux disciplines. Par exemple, les cours de mathématiques pourraient se vouloir moins formels et plus concrets, le tout de façon progressive bien sûr, mais l'on peut légitimement se poser la question de la nécessité de dispenser des cours de mathématiques parfois si abstraits à des non-spécialistes. Cependant, il serait bien impertinent de n'exiger des « efforts » que de la part des mathématiciens. L'enseignant de physique et de chimie pourrait lui aussi faire un pas vers son collègue de mathématiques en essayant d'être plus rigoureux sur certaines notions. Cela étant, un des objectifs de ce mémoire est donc de chercher quelle(s) notion(s) devrait(-ent), à mon humble avis, être adaptée(s) d'un côté ou de l'autre.

b. Contexte et premières investigations

Étant lors de l'écriture de ce mémoire en *M2B* (M2 non-stagiaire suite à un CAPES 2020 loupé), j'effectue un stage filé, différent donc des stages SOPA qui ont pu être réalisés en M1. Je suis donc dans un lycée (lycée Berthelot à Toulouse) tous les vendredis, de début octobre 2020 jusqu'à début mars 2021. Je suis ainsi au contact d'élèves de 2nde, de 1ère Enseignement Scientifique et T^{le} Enseignement Scientifique. Le contexte sanitaire étant celui que nous connaissons, il n'est pas évident pour ma tutrice de me laisser beaucoup la main pour donner cours. J'ai tout de même pu dispenser des cours de cristallographie aux 1ères et des cours sur les échelles macroscopique et microscopique de la matière aux 2nde notamment. Les séances avec les 2nde sont, pour une part importante, des activités expérimentales durant lesquelles je suis là en soutien et cela se transforme souvent en co-animation.

Au début de ce stage, j'ai posé, via un sondage en ligne, une liste de questions aux élèves. Le sondage a été diffusé à tous les élèves de ma tutrice et pas seulement aux élèves que j'ai pu avoir en face de moi. Les questions étaient assez diverses, mais celles qui étaient les plus orientées pour mon mémoire étaient par exemple « Le niveau en mathématiques influence-t-il le niveau en physique, ou inversement ? », « Les difficultés rencontrées semblent-elles liées ? » et « Penses-tu que ton enseignant de mathématiques et ton enseignant de sciences physiques travaillent ensemble ? ». Les réponses à ces questions sont en ANNEXE (figures 16, 17 et 18). Pour la première question ci-avant, on voit que les réponses recueillies sont en proportions très diverses. Cela est plutôt normal puisque cela dépend de la sensibilité de chacun. Il est tout de même à noter que plus de la moitié des élèves qui ont répondu pensent que leurs niveaux en mathématiques et en physique- chimie sont interdépendants. Ma surprise était plus prenante à la vue des résultats récoltés à la deuxième question ci-avant. Bien que beaucoup d'élèves se plaignent souvent de la présence trop pesante des mathématiques en physique-chimie, ils sont minoritaires à affirmer que les difficultés rencontrées dans les deux disciplines ne sont pas liées. Enfin, le « non » l'emporte avec une infime avance sur le « oui » quant à la coopération ressentie des enseignants des deux matières. Après discussion avec ma tutrice, il semblerait que la coopération entre enseignants de mathématiques et de physique-chimie soit inexistante, d'où le sourire en coin que j'ai pu observer à la vue des 43 % de « oui » par ma tutrice. En

creusant un peu le sujet de la coopération entre professeurs, les deux enseignants de physique-chimie que j'avais alors en face de moi en sont arrivés à la conclusion suivante :

« *Avant d'aller s'harmoniser avec les mathématiques, il serait déjà bien que nous accordions nos violons quant aux exigences que nous avons, nous tous, enseignants de physique-chimie de ce lycée* ».

c. Idées d'activités à mener

Avant une quelconque réelle mise en œuvre, plusieurs idées d'activités me sont venues, mais je me suis souvent freiné tout seul face à la potentielle difficulté de mise en place que cela pouvait engendrer étant donné que je n'ai pas mes propres classes. Ayant pu remarquer que la même question posée lors de deux évaluations, l'une en mathématiques et l'autre en physique-chimie, pouvait amener l'élève à répondre de façon différente selon le contexte dans lequel il se trouvait, j'ai pensé qu'il serait intéressant de mettre les élèves eux-mêmes devant ce constat. Par exemple, je pourrais intervenir une fois en maths en leur faisant faire un test « à la sauce professeur de mathématiques », puis une autre fois un test très similaire « à la sauce professeur de sciences physiques ». Si l'élève ne se rend pas compte seul des différences qu'il fait entre les deux approches, une sorte de correction et/ou de mise en parallèle des deux tests faite par mes soins pourrait les révéler et faire réfléchir les élèves sur la proximité entre mathématiques et physique- chimie sur certains points. Les tests en question reposeraient sur les programmes de mathématiques du niveau considéré (ou du niveau inférieur), de sorte à ce que je puisse partir de l'idéal où tous les élèves traiteraient les sujets avec la même base de niveau mathématique.

V. Premier test : mathématiques

a. Énoncé et justification des choix de questions posées

Le premier test est initialement proposable à l'ensemble des lycéens (en tous cas à tous les niveaux, de la seconde à la terminale spécialité mathématiques et/ou physique- chimie). Dans les faits, il n'a été donné qu'à deux classes de seconde. Pour m'assurer de la condition évoquée au paragraphe précédent, ce sujet (fourni en ANNEXE figures 19 et 20) repose entièrement sur le programme de seconde de mathématiques et sera donc volontairement assez abstrait.

Les trois premières questions reposent sur les vecteurs et les connaissances associées. Tout d'abord, il était demandé d'énumérer les vecteurs ayant la même norme et les vecteurs ayant le même sens, de façon à vérifier si la différence entre direction et sens était bien acquise. La deuxième question a plus de lien direct avec le test de physique. En effet, les élèves devaient donner une des possibilités parmi les vecteurs donnés qui vérifieraient $\vec{v} + \vec{w} + \cdots = \vec{0}$. Nous verrons pour le test de physique que ce type de question sera appliqué à un système pseudo-isolé. Enfin, la troisième question exigeait de donner les coordonnées de deux vecteurs et de calculer leurs normes ; les relations littérales étant données.

Les questions 4 à 7 traitent des fonctions affines. Après leur avoir demandé de donner le nom des nombres a et b dans l'équation de droite générale $y = ax + b$, j'ai voulu qu'ils m'expliquent leur méthode pour déterminer le coefficient directeur a. La question 6 avait pour objet de les faire réfléchir sur la particularité des coordonnées d'un point K qui serait le point

d'intersection entre une droite du repère et l'axe des ordonnées. Les faire réfléchir sur cela n'est pas très habituel dans leur cursus, mais cela devait pouvoir les aider à donner les équations des droites données à la question 7, puisque pour 3 droites sur 5, l'ordonnée à l'origine n'était pas visible sur le graphique.

La question 8 est une question directe de proportionnalité, une des plus simples qu'ils ont pu rencontrer jusqu'ici, à savoir déterminer si les deux entrées d'un tableau de valeurs sont proportionnelles ou non.

b. Réponses au test et réponses potentielles d'élèves

La correction de ce test est fournie en ANNEXE (figures 21 et 22). Une bonne partie de ce test, s'il est réalisé en autonomie, est assez directe. En ce sens que pour la majorité des questions posées, l'élève sait répondre ou ne sait pas. Dans la partie vectorielle, il s'agit uniquement de connaître le vocabulaire rattaché à cette notion ou de la lecture graphique. Pour le calcul des normes, il faut aussi demander le bon calcul à la calculatrice. Dans cette partie, donc, je m'attendais à davantage de soucis de calculatrice que de réels problèmes inhérents à l'objet mathématique qu'est le vecteur.

De la même façon, les questions 4, 5 et 8 ne demandaient pas de raisonnement mathématique. Si l'élève connaît le cours sur les fonctions affines et les équations de droites qui les représentent, ces questions sont immédiates. S'il ne sait pas, les réponses sont difficiles à inventer. Concernant la proportionnalité, le format de la question est celui vu depuis le collège donc l'immense majorité des élèves savent y répondre et savent expliquer leur raisonnement.

En revanche, les questions 6 et 7, elles, sont bien plus délicates puisqu'elles imposent une maîtrise de la notion suffisante pour s'approprier l'énoncé et adapter ses connaissances à un contexte un peu plus complexe que d'ordinaire. Je m'attendais donc à récupérer des productions plutôt fragiles sur ces deux questions.

c. Analyses de productions d'élèves

i. Question 1

Cette question a été réussie par l'immense majorité des élèves. Beaucoup ont même inclus les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans leurs réponses (figure 2).

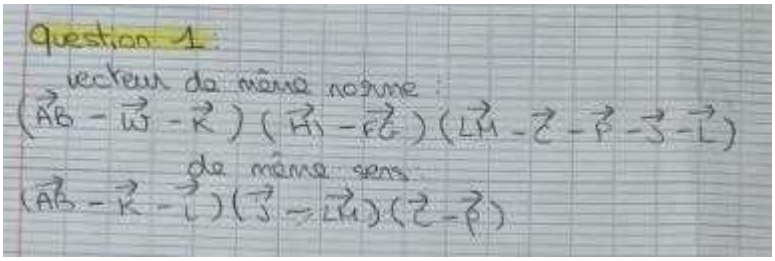


Figure 2

ii. Question 2

Bien que je pensasse cette question relativement simple, puisque la « pointe » du vecteur $\vec{w}$ coïncide avec le début du vecteur $\vec{v}$, la moitié des élèves se sont trompés ou n'ont pas su quoi répondre. Plus anecdotiquement, parmi les réponses correctes, tous les élèves ont donné la même, à savoir $+2\vec{c}$. $+2\vec{p}$ était une réponse tout aussi directe, mais le vecteur $\vec{c}$ est plus à l'écart, donc peut-être plus vite repérable.

iii. Question 3

J'ai été surpris de constater qu'une part non-négligeable des élèves se sont arrêtés aux relations littérales. Cela est d'autant plus surprenant que la plupart du temps, nous leur reprochons plutôt d'écrire directement les applications numériques en omettant les expressions littérales… du moins en physique-chimie.

iv. Question 4

Ici, une légère majorité des élèves a répondu correctement. Néanmoins, sur certaines productions, nous pouvons constater des confusions. Plusieurs élèves ont parlé d'abscisse et d'ordonnée, respectivement pour a et b tandis que d'autres les ont qualifiés de repères. Cela soulève un ensemble de confusions que je n'avais pas remarquées jusqu'alors. On retrouve ce type de difficulté dans le supérieur, lorsqu'il s'agit de distinguer « base », « repère » et « référentiel » par exemple.

v. Question 5

Pour cette question, environ un élève sur trois a répondu correctement, pendant que la moitié des élèves n'a pas répondu ou a répondu faux. Cette proportion est cohérente avec ce qui a déjà pu être remarqué sur les exercices de physique chimie en électricité où il faut déterminer une résistance à l'aide d'un graphe où est tracée $u = f(i)$. En figure 3, j'ai pris un exemple d'explication sous forme de phrase d'une élève. Connaissant moi- même la méthode pour déterminer le coefficient directeur, je réussis à comprendre globalement l'idée décrite, mais l'explication est assez approximative. C'est pourquoi je pense qu'il s'agit davantage d'une difficulté à exprimer à l'écrit une méthode personnelle, que d'une mauvaise méthode.

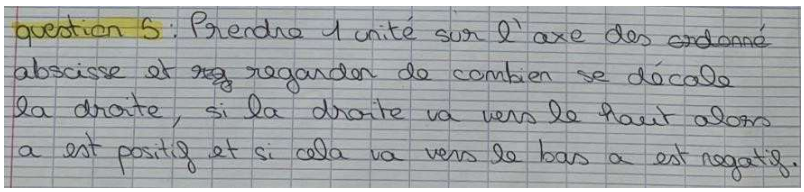

question 5 : Prendre 1 unité sur l'axe des ordonné abscisse et reg regarder de combien se décale la droite, si la droite va vers le haut alors a est positif et si cela va vers le bas a est negatif.

Figure 3

vi. Question 6

Cette question, qui demandait plus d'appropriation de la leçon que les autres, n'a pas été réussie. Plus de la moitié des élèves n'ont pas répondu et ceux qui ont tenté de répondre n'ont pas réussi à répondre correctement. Toutefois, un tiers des élèves ont trouvé un rapprochement entre le point K et l'ordonnée à l'origine b. Seulement, la plupart du temps, un point se retrouvait égal à un nombre ($K = b$) ou bien les coordonnées de K étaient égales aux « coordonnées de la droite ».

vii. Question 7

Comme dit précédemment, cette question était pour le moins ardue, en tous cas pour les droites B, D et E puisque l'ordonné à l'origine n'était pas visible sur le repère fourni. C'est donc sans surprise que la proportion d'élève ayant réussi l'exercice totalement est très faible (2 élèves de la classe). Cependant, les équations des droites A et C étaient assez facilement trouvables et un élève sur trois a déterminé les deux équations correctement.

viii. Question 8

Cette dernière question a eu plus de succès que les précédentes. La quasi-totalité des élèves a répondu juste, ce qui est conforme à ce que j'avais imaginé.

VI. Deuxième test : physique

a. Énoncé et justification des choix

Cet énoncé a été proposé à la même classe qui a composé pour le test de mathématiques, mais a aussi été proposé à une classe supplémentaire, dont les élèves n'ont pas composé sur le test de mathématiques. Cela pourra permettre d'observer si l'exercice de mathématiques influence ou non, positivement ou non, les productions des élèves au test de physique.

Comme dit précédemment, le test de physique s'appuie sur les mêmes notions mathématiques que le test de mathématiques. Les notions sont alors abordées de façon plus appliquées et plus concrètes. L'énoncé dont il est question ici figure également en ANNEXE (figures 23, 24 et 25). La première question porte sur une résultante nulle des forces appliquées sur une voiture garée en pente. Il est intéressant de noter que les élèves à qui a été posé ce test n'avaient pas encore vu les forces et leur représentation vectorielle en physique-chimie. De plus, le test de physique a été donné après celui de mathématiques où la notion de somme nulle de vecteurs a été abordée. Cette question demande donc à l'élève de tracer un troisième vecteur force de façon à ce que la voiture reste immobile. Bien que les élèves n'aient pas encore vu cette notion en cours de physique chimie, j'ai estimé qu'ils avaient, théoriquement, le bagage mathématique nécessaire et suffisant pour tenter de répondre.

Toutes les questions qui suivent gravitent autour d'une même situation, à savoir la proportionnalité entre la hauteur de sable qui s'écoule d'un sablier et le temps écoulé. Pour tenter d'interpeller les élèves sur leur « erreur » récurrente qui consiste à dire que

« si les points représentant les donnés de la situation physique ne sont pas exactement alignés et ne peuvent pas être reliés par une droite qui passe par l'origine du repère, la situation n'est pas proportionnelle. » , j'ai voulu modifier la situation du sablier en clepsydre, de façon à moduler légèrement les données de telle sorte à ce que les points ne soient pas parfaitement alignés (comme ils le sont dans le cas du sablier). Je fais alors intervenir trois élèves fictifs. Une première, Morgane, qui affirme que la situation est proportionnelle malgré tout, comme on a l'habitude de le penser en physique. Une deuxième, Pauline, qui estime que la situation n'est pas proportionnelle et qui raisonne comme écrit plus haut. Enfin une troisième, Ivana, qui reporte les points avec un stylo à pointe très

épaisse. Il est alors demandé aux élèves s'ils pourraient tracer une droite qui passerait par tous les gros points. J'ai bien sûr fait en sorte que ce soit possible, *stricto sensu.* Bien que pour un physicien ou un mathématicien aguerri ces points grossiers, et qui plus est, carrés puissent donner des sueurs froides, l'idée ici était de matérialiser la surface à l'intérieur d'hypothétiques barres d'erreur liée aux incertitudes de mesure. De cette façon, si tant est que les élèves pensaient que la hauteur d'eau écoulée de la clepsydre n'est pas proportionnelle, je veux mener les élèves à se questionner sur leurs propres façons de penser. Il serait assez idéal qu'un élève pense de prime abord que la hauteur d'eau qui s'écoule de la clepsydre n'est pas proportionnelle au temps, puis qu'en traçant une droite passant par tous les points grossiers d'Ivana, l'élève en vienne à évoquer avec ses mots l'idée d'incertitude.

Comme exprimé en début de paragraphe, une partie des copies prises en exemple pour illustrer mes propos concernent des élèves qui n'ont pas eu à composer sur le test de mathématiques. Il sera donc précisé, si tant est que cela soit pertinent, si la copie en question a été récupérée par d'élève ayant subi le test de mathématiques ou pas.

b. Réponses au test et réponses potentielles d'élèves

La correction de ce test est également fournie en ANNEXE (figures 26 et 27). Les éventuelles réponses d'élèves à la première question sur le système pseudo-isolé sont difficiles à imaginer. Il peut exister autant de conception initiale que d'élèves. Néanmoins, bien qu'ils aient, normalement, le bagage mathématique nécessaire et suffisant pour essayer de répondre à cette question, plusieurs obstacles peuvent survenir. Par exemple, le fait que le poids et la réaction du support n'aient pas le même point d'application peut perturber les élèves.

Pour la suite concernant la proportionnalité, j'ai déjà évoqué le raisonnement que beaucoup d'élèves font sur les situations modélisées par une régression linéaire quand les points expérimentaux ne sont pas rigoureusement alignés. Toutefois, plusieurs profils peuvent se dégager en étant confrontés à cet enchaînement de questions.

Il peut tout d'abord y avoir des élèves, convaincus que l'écoulement d'eau de la clepsydre n'est pas proportionnel au temps, et ce, indépendamment du déroulé des questions, qui passeront à côté de la réflexion que ce test voulait leur faire avoir.

Il est également probable que certains élèves interceptent l'idée que je veux leur transmettre. Auquel cas, leur avis quant à la proportionnalité est susceptible d'évoluer au fur et à mesure des questions posées.

Vraisemblablement, au moins une petite partie des élèves interrogés auront déjà saisi cet implicite qui veut qu'en physique et en chimie, la prise en compte des incertitudes dans la modélisation peut amener à considérer une situation réelle comme proportionnelle, malgré des mesures expérimentales qui auraient tendance à traduire le contraire.

c. Analyses de productions d'élèves

i. Question 1

Bien que les élèves n'aient pas encore abordé la notion de force en physique-chimie au moment du test, un peu plus de la moitié des élèves ont tracé un vecteur $\vec{F}$ qui part du point G, se dirige approximativement dans la bonne direction et dans le bon sens (figures 4 et 5).

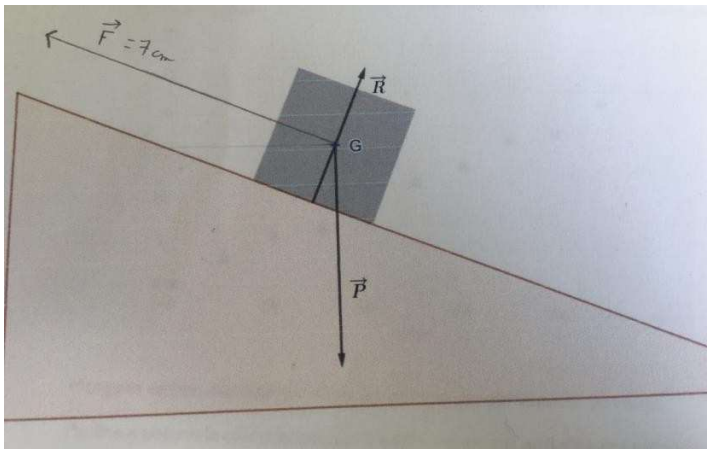


Figure 4

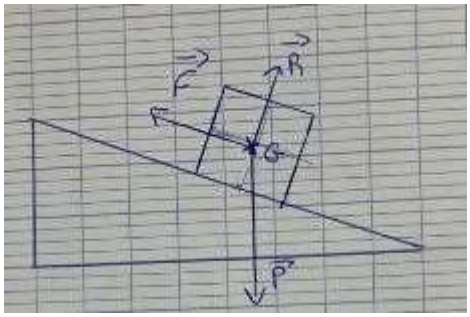


Figure 5

Une des explications qui peut découler de ce constat consiste à penser que ces élèves ont pu tracer un vecteur qui leur paraissait correspondre, sans toutefois réaliser le tracé de façon plus précise. Jusqu'à trois élèves par classe ont réussi à tracer correctement le vecteur $\vec{F}$ (figure 6).

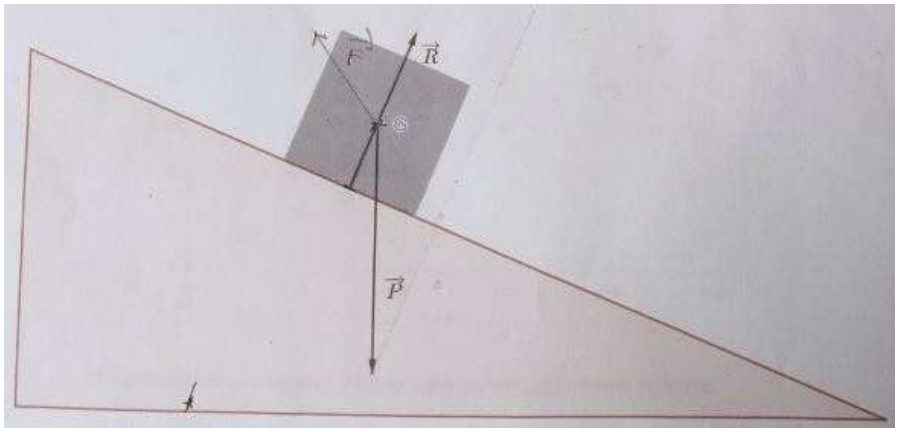


Figure 6

Cela montre que, même sans leçon sur les forces et leur représentation vectorielle, les élèves sont capables de mobiliser leurs connaissances mathématiques pour les appliquer en physique, pour peu que les propriétés physiques ou chimiques leur soient données (ici la définition d'un système pseudo-isolé). D'autres exemples de tracés ont tendance à diriger $\vec{F}$ dans la même direction que $\vec{R}$ (figure 8) ou dans une direction entre celle de $\vec{R}$ et celle du poids $\vec{P}$ (figure 7).

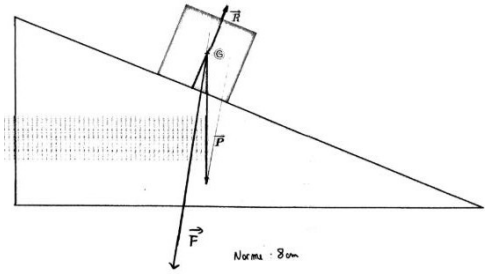


Figure 7

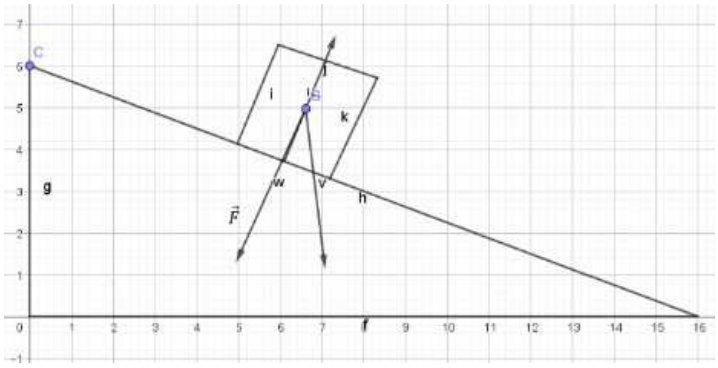


Figure 8

ii. Question 2

Cette question a fait l'unanimité, aux nuances près. Tous les élèves ont affirmé que la hauteur de sable s'écoulant du sablier est proportionnelle au temps. Tous ont également justifié leurs propos en précisant que la proportionnalité est due au fait que l'on peut tracer une droite passant par l'origine du repère à partir des points expérimentaux (figure 9).

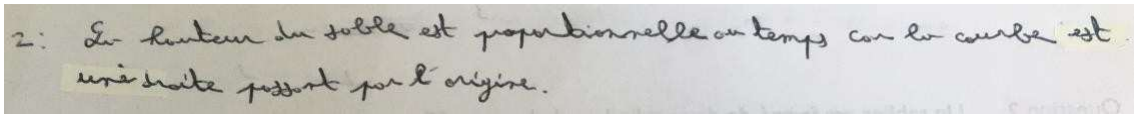
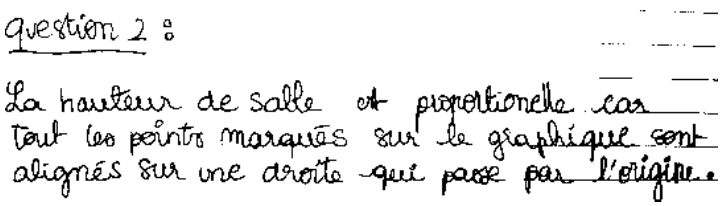

2: La hauteur du sable est proportionnelle au temps car la courbe est une droite passant par l'origine.

Figure 9

Près d'un tiers des élèves ont ajouté que tous les points étaient parfaitement alignés sur la droite qu'ils ont tracée (figure 10).


Question 2 :

La hauteur de salle est proportionelle car tout les points marqués sur le graphique sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.

Figure 10

iii. Question 3

La détermination du coefficient directeur (ou de proportionnalité) a été correctement faite par plus des deux tiers des élèves (figure 11).

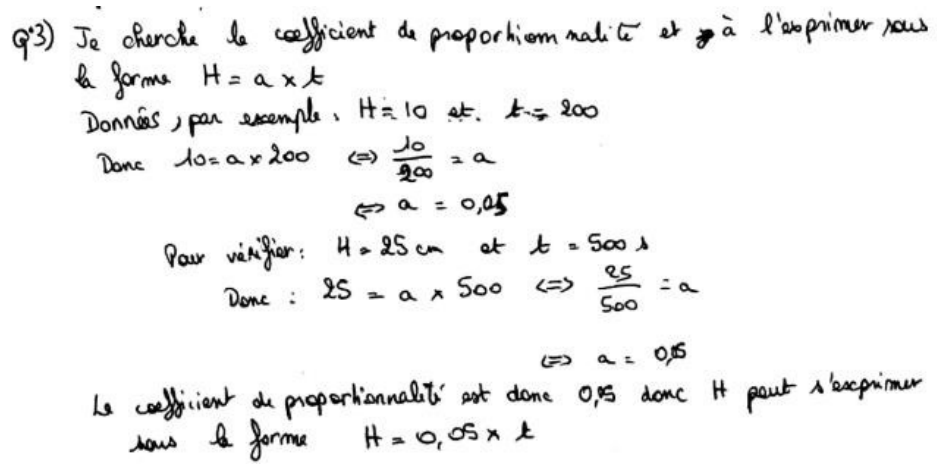


Figure 11

Une petite proportion, moins d'un quart de l'échantillon, a calculé l'inverse, soit :

a= $\frac{100}{5} = 20$ (figure 20).

prendre 100 en abscisse et 5 en ordonnée puis le diviser$100 \div 5 = 20$. Ensuite on peut faire la même chose avec un autre point facile pour pouvoir comparer comme 300 en abscisse et 15 en ordonnée $300 \div 15 = 20$. On voit que le résultat est le même donc cela veut dire que c'est proportionnel.

3° Les calculs sont dans la question précédente donc le coefficient multiplicateur est 20 a=20.

Figure 12

Cette erreur se trouve uniquement chez les élèves qui n'ont pas fait le test de mathématiques avant. La part d'élèves restante n'a pas répondu ou a démontré de grosses confusions (figure 13).

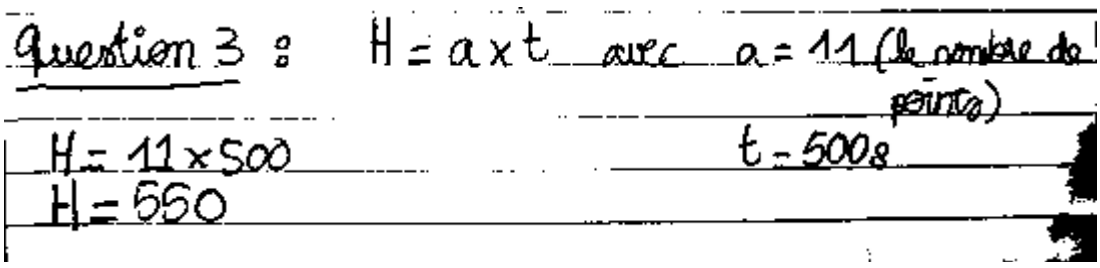


Figure 13

d. Cas des questions 4 et 5

Comme je m'y attendais, ces questions ont conduit à presque autant de réponses que d'élèves. J'ai donc regroupé les types de réponses les plus fréquents ainsi que leur fréquence d'apparition pour les deux questions dans les deux tableaux ci-dessous.

Tableau 1 :

Question 4	
Impossibilité de tracer une droite qui passe par l'origine et par tous les points, donc situation non-proportionnelle.	50 %
Selon le nombre de points situés en dessous ou au-dessus de la courbe, la situation est proportionnelle ou non.	20 %
Situation proportionnelle, mais droite « imparfaite » due aux « imprécisions » ou au caractère « expérimental » de l'expérience.	25 %
On peut tracer une droite passant par l'origine, donc situation proportionnelle.	5 %

Tableau 2 :

Question 5	
Le tracé est possible, mais pas précis, la situation est proportionnelle.	45 %
Le tracé est possible, mais pas assez précis donc la situation n'est pas proportionnelle.	40 %
Le tracé impossible, mais la situation « semble » proportionnelle.	15 %

Grâce à ces tableaux, on peut se rendre compte que même si la moitié des élèves questionnés pensent d'abord que la situation n'est pas proportionnelle, le fait d'avoir grossi les points et d'avoir posé la question à nouveau a permis d'avoir à la fin du test presque la moitié des élèves qui évaluent finalement la situation comme étant effectivement proportionnelle.

Bien sûr, ces chiffres sont à nuancer, puisqu'en réalité, la proportion d'élèves difficiles à convaincre n'est pas négligeable. Ces élèves, bien que perturbés par la question 5, n'ont pas voulu faire de concession sur le caractère proportionnel de la hauteur d'eau écoulée par rapport au temps. De la même façon, les élèves déjà convaincus de la proportionnalité des deux grandeurs n'ont pas changé d'avis sous prétexte que les points étaient plus gros. La dernière ligne du tableau 2 est intéressante. Ces 15 % jugent impossible le tracé convenable d'une droite qui modéliserait la situation, mais la taille des points semble toutefois leur faire accepter qu'il y ait bien proportionnalité.

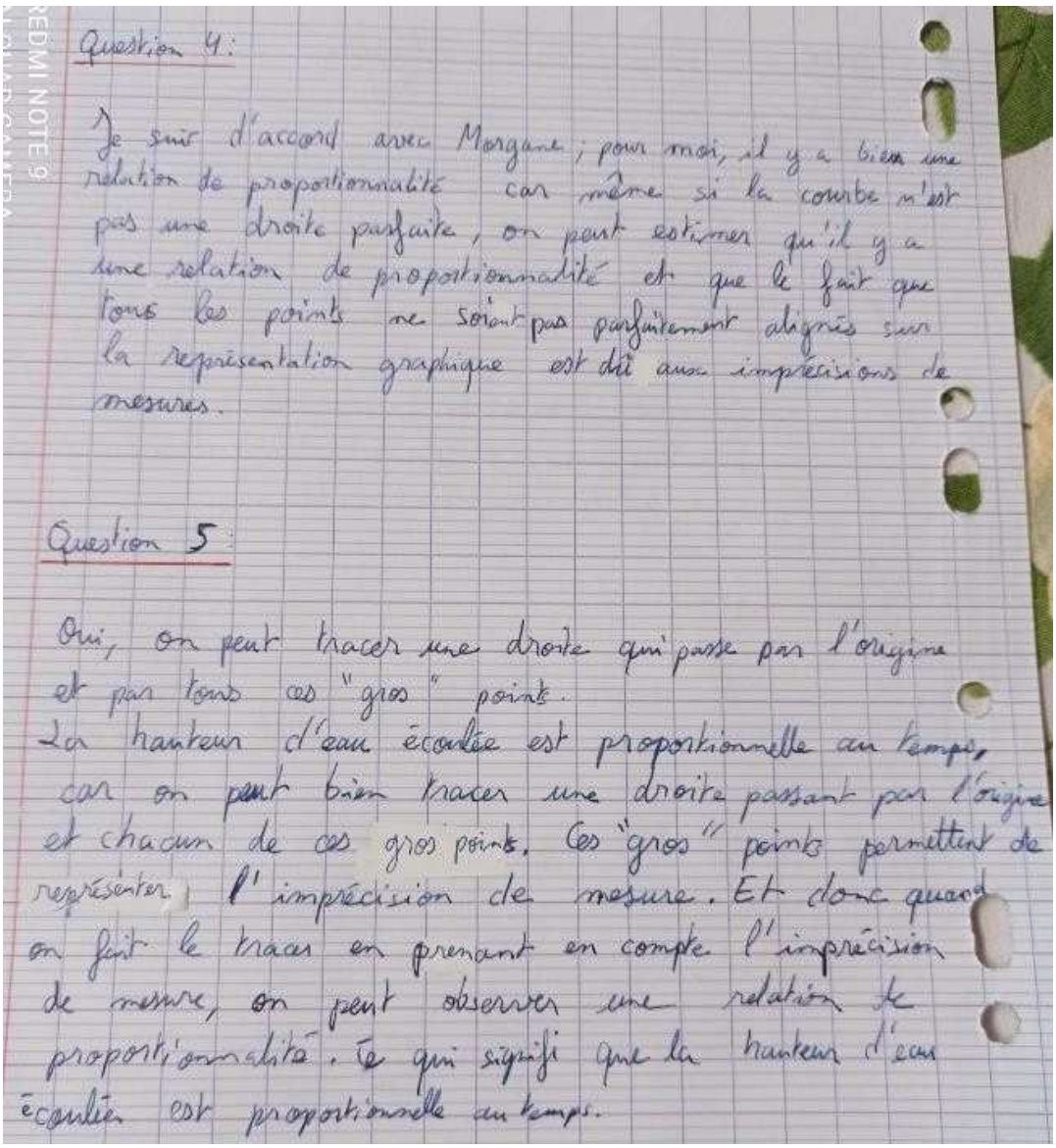
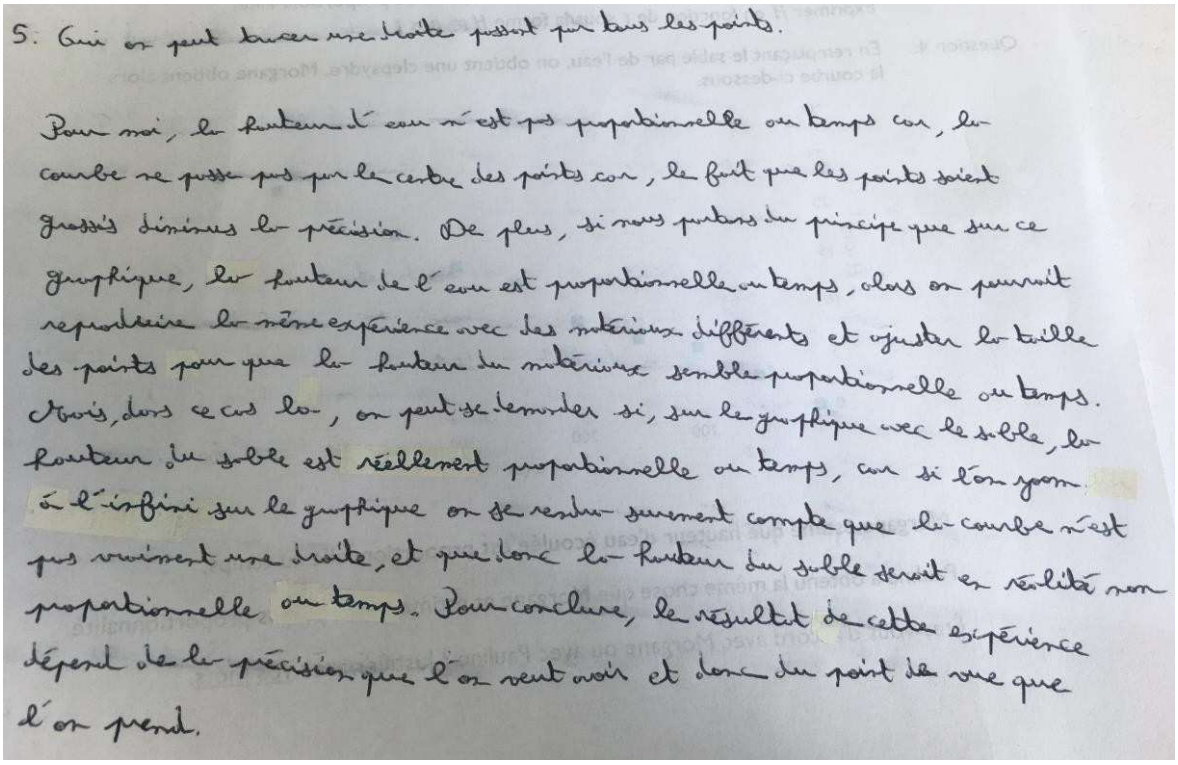


Figure 14

La première copie (figure 14) est celle d'un élève ayant compris dès le début que la quantité d'eau qui s'écoule d'une clepsydre est proportionnelle au temps. Il fait clairement mention de la notion d'imprécision de mesure dès la question 4 et explique que les gros points expérimentaux sont justement présents pour représenter cette incertitude. La deuxième copie (figure 15) est celle d'un élève qui explique avec détail , que si on peut effectivement tracer une droite passant par tous les points, la situation n'est pas proportionnelle pour autant. Il met même en doute la proportionnalité dans le cas du sable pour le sablier en imaginant que si nous pouvions « zoomer à l'infini » sur une portion de courbe, peut-être nous rendrions-nous compte qu'en réalité la courbe n'est pas exactement une droite. Il précise que si l'on voulait multiplier l'expérience en testant des fluides autres que le sable et l'eau, alors il suffirait d'adapter la taille des points expérimentaux au besoin jusqu'à ce que le tracé d'une droite passant par l'origine soit possible. Nonobstant toute cette argumentation, il finit en écrivant que la conclusion sur cette expérience d'écoulement dépend de la précision exigée et du point de vue pris.


5. Car on peut tracer une droite passant par tous les points.

Pour moi, la hauteur de l'eau n'est pas proportionnelle au temps car, la courbe ne passe pas par le centre des points car, le fait que les points soient grossis diminue la précision. De plus, si nous partons du principe que sur ce graphique, la hauteur de l'eau est proportionnelle au temps, alors on pourrait reproduire la même expérience avec des matériaux différents et ajuster la taille des points pour que la hauteur du matériaux semble proportionnelle au temps. Mais, dans ce cas là, on peut se demander si, sur le graphique avec le sable, la hauteur du sable est réellement proportionnelle au temps, car si l'on zoom à l'infini sur le graphique on se rendra surement compte que la courbe n'est pas vraiment une droite, et que donc la hauteur du sable serait en réalité non proportionnelle au temps. Pour conclure, le résultat de cette expérience dépend de la précision que l'on veut avoir et donc du point de vue que l'on prend.

Figure 15

VII. Bilan des deux premiers tests

Ces deux premiers tests, centrés sur les notions de vecteurs, de fonctions linéaires et de proportionnalité, ont montré que les mathématiques peuvent avoir un important impact sur la réflexion des élèves. Dans le cas de la proportionnalité, cette empreinte très présente des cours de mathématiques est tout à fait normale. En effet, les élèves apprennent à reconnaître et traiter des situations de proportionnalité que l'on pourrait qualifier de « parfaite » dès le collège. Ils sont confrontés à différents types de problèmes tels que les pourcentages, les coefficients de proportionnalité et les évolutions successives. Cependant, les situations alors choisies le plus souvent pour rendre la notion plus concrète imposent cette proportionnalité « parfaite », non seulement parce que le fameux coefficient de proportionnalité est au cœur de ces situations, mais aussi parce que ces situations impliquent quasi-systématiquement une ordonnée à l'origine. De fait, toutes les représentations graphiques qui peuvent découler de ces exercices auront la même allure, à savoir « *une droite passant par tous les points et par zéro* ». Cette vision, fortement ancrée de la proportionnalité en mathématiques, rend beaucoup d'élèves étanches à la notion de proportionnalité telle que conçue en physique-chimie, où les mesures sont par nature entachées d'une incertitude et où les points expérimentaux relatifs aux situations étudiées sont quasiment jamais exactement alignés.

Depuis quelques années, pourtant, la notion d'incertitude prend de plus en plus de place dans les programmes de physique-chimie. L'arrivée des incertitudes au programme du cycle 4 pourrait assouplir davantage la conception que se font les élèves des mesures physico-chimiques et donc de la modélisation par régression linéaire.

VIII. Ouverture

a. Poursuite des investigations sur la notion de dérivée

Le sujet de la dérivée de fonction, qui a été abordé dans les paragraphes II et III, mériterait pour les raisons évoquées dans lesdits paragraphes un approfondissement au même titre que la proportionnalité. Des exercices sous le même format que les tests dont il est question dans ce mémoire (ou d'un autre format d'ailleurs) pourraient être envisagés en se basant sur les programmes de première et/ou de terminale spécialité mathématiques. Ces investigations n'ont pas été effectuées par mes soins jusqu'à la rédaction de ce mémoire pour plusieurs raisons. La raison majeure est le manque de temps. Le format du stage effectué, la situation sanitaire dans les lycées que nous connaissons tous ainsi que ma préparation au concours du CAPES de physique-chimie et au CAPLP de maths- physique-chimie ont rendu l'entreprise particulièrement délicate. L'autre raison est le format du nouveau baccalauréat. Comme écrit plus haut, la dérivation de fonctions et toutes les notions gravitant autour sont vues en spécialité de mathématiques ou sont apprises sur le tas en spécialité de physique-chimie lors du chapitre de mécanique du point. Il est également possible que des élèves n'ayant pas poursuivi la spécialité mathématiques en terminale suivent l'option de mathématiques complémentaires. En mécanique du point, la notion de primitive est souvent traitée avant que les élèves, mêmes spécialistes des mathématiques la traitent en cours de mathématiques. Il faut alors ruser en raisonnant à « l'envers » en demandant *« quelle fonction vitesse $v(t)$ donnerait la fonction accélération $a(t)$ en étant dérivée ? »* et de même pour obtenir la fonction position $x(t)$. Cette difficulté est souvent accentuée chez les élèves trop habitués à ce que la variable soit majoritairement x et pas t en mathématiques. Expérimenter des choses sur ces notions avec des élèves impose donc de sélectionner correctement un échantillon potentiellement réduit d'élèves. En guise de contrainte supplémentaire, il serait idéal que les élèves choisis aient le/la même enseignant(e) de spécialité physique-chimie et le/la même enseignant(e) de spécialité mathématiques de sorte à ce que les noms des enseignants soient un paramètre fixé et n'influencent pas les données recueillies.

b. Autres points intéressants à développer

1) Les obstacles liés aux notations

Bien que le problème des notations ait commencé à être abordé en introduction, c'est bien sur une autre facette de celui-ci dont il va être question ici. La formulation écrite de principes ou de lois peut être elle-même source de difficultés et d'incompréhension. Les sciences physiques reposent en majorité sur l'appropriation et l'utilisation de ces lois et principes qui, eux se formalisent à l'écrit à l'aide d'outils mathématiques. L'apprentissage des sciences physiques inclut donc une maîtrise de ces outils. Depuis quelques années, on nous enjoint à définir la vitesse comme le rapport entre une distance et une durée, soit $v = \frac{d}{\Delta t}$. Beaucoup d'élèves sont davantage habitués à utiliser $v = \frac{d}{t}$ en mathématiques, et pour cause. En mathématiques, ils apprennent que deux lettres écrites conjointement se multiplient entre elles comme dans l'expression $f(x) = ax + b$ où a est multiplié à x, alors que dans l'exemple Δt, Δ est un opérateur différence appliqué au temps t. (Bengloan & Nichele, 2012) La difficulté soulevée ici peut se répercuter dès que les dérivées sont notées $\frac{dy}{dx}$ en physique. Pendant longtemps dans la scolarité des élèves, d est la distance tout comme x parfois, alors qu'en physique x est la position et d l'opérateur différentiel ; surgit alors un potentiel cercle vicieux pour les élèves.

2) Le signe « = »

Le signe « = » semble être un des plus connus et des plus familiers de tous les symboles mathématiques. Pourtant, déjà au niveau lycée, le signe « = » est utilisé dans plusieurs contextes différents et possède donc plusieurs significations différentes. Lors d'une opération très simple telle que 2 + 3 = 5, le sens de signe « = » est d'ores et déjà souvent mal compris[5]. On a tendance à penser que le signe « = » signifie *« en faisant l'opération à gauche du signe =, on obtient le résultat à droite du signe = »*, alors que la présence de ce signe « = » entre deux entités, ici « 2 + 3 » et « 5 » traduit l'équivalence entre celles-ci ; en effet « 2 + 3 » représente la même quantité de *choses* que « 5 » et à ce titre, il est *vrai* d'affirmer que « 2 + 3 = 5 ».

Il est une deuxième utilisation du signe « = » très répandue, en tous cas omniprésente en physique, mais de moins en moins à mesure que les mathématiques gagnent en rigueur le long d'un cursus scolaire se trouve dans les fonctions. Cela a déjà été abordé en introduction pour une autre raison. En physique 99,99 % du temps, une fonction à n variables sera notée « $f(x, y, \dots) = \cdots$ ». Par exemple, l'énergie totale d'un pendule pesant est modélisable par une fonction de deux variables : l'angle θ que fait le pendule avec la verticale et sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

Dans cet exemple, on comprend bien que le signe « = » n'a pas un sens d'équivalence. Il s'agit plutôt d'une définition. On définit l'énergie totale E par la fonction $E(\theta, \dot{\theta})$ dont l'expression est $\frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$. C'est pourquoi, en mathématiques, de façon plus rigoureuse, une telle fonction serait notée :

$$E: (\theta, \dot{\theta}) \mapsto \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

Cela peut se lire *« Soit E la fonction qui, au couple de variables $(\theta, \dot{\theta})$ associe (l'expression) $\frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$ »*. On voit ici que le signe « = » n'intervient pas dans l'écriture.

Un autre exemple, qui tend à tomber en désuétude, se trouve en chimie. En effet, jadis les équations de réaction étaient souvent écrites avec le signe « = ». Par exemple, la combustion du charbon $C_{(s)}$ dans le dioxygène de l'air $O_{2(g)}$ pouvait s'écrire (sans tenir compte du fait que la réaction soit totale ou non) :

$$C_{(s)} + O_{2(g)} = CO_{2(g)}$$

Ainsi, il m'est arrivé de voir des enseignants utiliser ce type d'écriture et qu'un élève demande :*« Mais monsieur/madame, si*

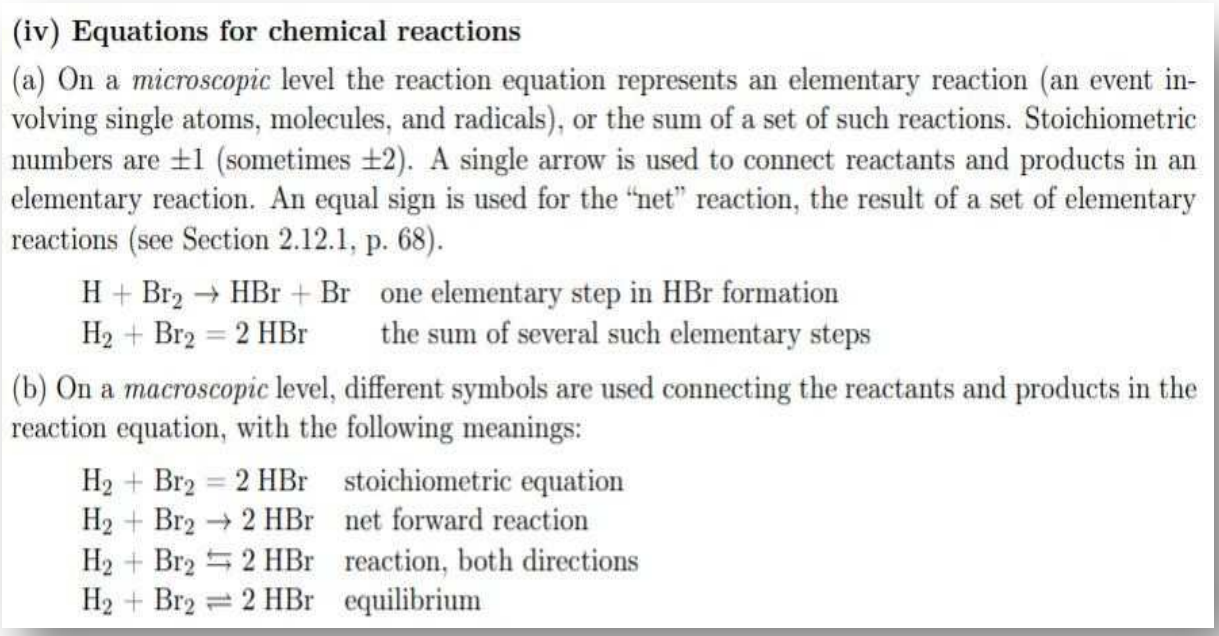
$$C_{(s)} + O_{2(g)} = CO_{2(g)}$$

[5] (Khan Academy, 2015)

est vrai, peut-on aussi écrire

$$C_{(s)} = CO_{2(g)} - O_{2(g)}$$

? ». Suite à quoi l'enseignant(e) et moi-même restions pantois, comme sidérés que cette idée saugrenue ait pu germer dans la tête d'un élève. Ce n'est qu'après discussion que nous nous sommes rendus compte du bien-fondé des différents symboles utilisés aujourd'hui. Désormais, une importance particulière est accordée à l'écriture des équations de réaction. Selon IUPAC[6], quatre symboles différents sont proposés, mais dont l'usage est cadré :



(iv) Equations for chemical reactions

(a) On a *microscopic* level the reaction equation represents an elementary reaction (an event involving single atoms, molecules, and radicals), or the sum of a set of such reactions. Stoichiometric numbers are ±1 (sometimes ±2). A single arrow is used to connect reactants and products in an elementary reaction. An equal sign is used for the "net" reaction, the result of a set of elementary reactions (see Section 2.12.1, p. 68).

$H + Br_2 \rightarrow HBr + Br$	one elementary step in HBr formation
$H_2 + Br_2 = 2\ HBr$	the sum of several such elementary steps

(b) On a *macroscopic* level, different symbols are used connecting the reactants and products in the reaction equation, with the following meanings:

$H_2 + Br_2 = 2\ HBr$	stoichiometric equation
$H_2 + Br_2 \rightarrow 2\ HBr$	net forward reaction
$H_2 + Br_2 \leftrightarrows 2\ HBr$	reaction, both directions
$H_2 + Br_2 \rightleftharpoons 2\ HBr$	equilibrium

Figure 16 : recommandations IUPAC

On voit que le signe « = » est toléré, soit pour décrire « la somme de plusieurs réactions élémentaires » (associée au niveau microscopique), soit pour décrire une « équation stœchiométrique » (associée au niveau macroscopique) rendant uniquement compte de la pondération correcte de l'équation. Toutefois, cette nécessité de précision n'est rencontrée que dans le supérieur et sous réserve de suivre une filière spécialisée. Au lycée, les symboles « ⟶ », « ⇄ » et « ⇌ » sont donc vraiment préférables au signe « = », bien qu'il faille prendre le temps d'expliciter ces différents symboles aux élèves.

Le signe « = » possède aussi une multitude de variantes, notamment en informatique. Voici la liste non-exhaustive de celles que j'ai eu l'occasion de rencontrer dans mon cursus scolaire et universitaire.

[6] (Cohen, et al., 2007)

Tableau 3 :

Variante	Signification
≈	Approximation et valeur approchée
≠	« différent de »
≡	Équivalence logique ou « égal par définition »
:=	Opérateur affectation
==	Test d'égalité
===	Test d'égalité stricte
! =	Test de non-égalité
<= ou >=	Comparaison

IX. Conclusion générale

Ce mémoire avait pour objectif de démontrer l'importance et l'intérêt de l'interdisciplinarité entre mathématiques et physique-chimie, en mettant en exergue quelques-unes des différences entre les exigences des enseignants des deux matières concernées.

Dans un premier temps a fallu tout d'abord faire des recherches en didactique et en épistémologie afin de dresser un rapide inventaire des différences couramment observées entre mathématiques et physique-chimie. Cela m'a mené, dans un deuxième temps, à cibler les plus percutantes du point de vue de la physique pour créer ces tests destinés aux élèves tests niveau(x) choisi(s). Dans un troisième temps, il s'est agi de confronter les élèves aux différences d'exigences, d'analyser leurs copies afin de pouvoir leur donner un aperçu du lien indéfectible qui lie les mathématiques et les sciences physiques de façon à ce qu'ils s'en saisissent pour mieux appréhender l'un ou/et l'autre des disciplines.

Bien qu'ayant un bon avis sur le sujet lors de mes premières réflexions, mon stage et mes recherches ont levé le voile sur des points de difficultés que je n'aurais pu soupçonner auparavant. À tel point qu'étant susceptible de m'éparpiller et de vouloir aborder d'autres sujets plus ou moins en lien avec le mien, il m'était régulièrement impératif de me recentrer. Ce mémoire m'a fait également prendre conscience de l'atout que représente l'interdisciplinarité entre mathématiques et physique-chimie. J'ai pu, au contact de collègue néo-enseignants en lycée professionnel, apprendre que la co-intervention était imposée dans ces établissements entre les enseignants de matières dites générales (telles que la physique-chimie et les mathématiques) et les matières professionnelles en lien avec les filières correspondantes. Je pense qu'en lycée général comme en lycée professionnel, il serait bon d'envisager des dispositifs équivalents ou approchants entre les matières générales elles-mêmes, notamment les matières scientifiques. Il me semble que tendre vers une uniformisation des exigences disciplinaires jusqu'au baccalauréat ne peut qu'être bénéfique, surtout pour les élèves qui ne sont pas encore spécialisés et n'ont pas encore un recul suffisant sur leurs apprentissages. Quelle(s) que soit(-ent) la/les filières qu'ils ou elles empruntent par la suite, il leur sera toujours temps de s'adapter aux différents jargons plus spécifiques.

À partir de ce constat, nous pouvons d'ores et déjà envisager une nouvelle piste de recherche. En effet, en plus d'expérimenter les autres notions mathématiques précédemment citées, nous pouvons désormais réfléchir à la mise en place de ces dispositifs. Tout d'abord, peut-être à l'échelle d'une classe de test en faisant coopérer les enseignants de mathématiques, de physique-chimie et pourquoi pas de sciences de la vie et de la Terre, puis en mesurant l'effet de ces dispositifs sur la réussite scolaire des élèves par rapport aux classes « classiques » où les enseignants des différentes disciplines ne communiquent pas ou peu entre eux. Il serait donc peut-être intéressant aussi de répartir ce travail de recherche entre plusieurs étudiants/stagiaires pour que ces derniers coopèrent dans leurs investigations.

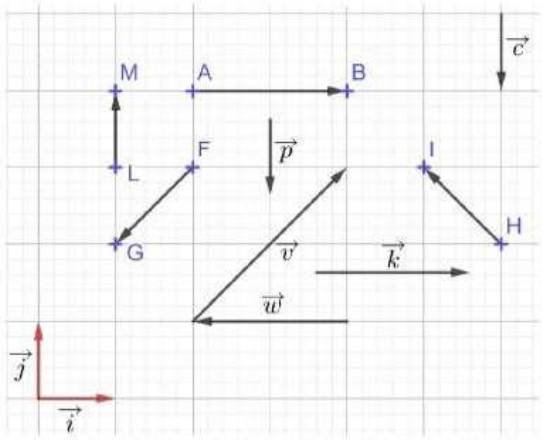
Enseignant(e)(s) de Physique :
Enseignant(e)(s) de Maths :
Classe :

TEST N°1 : MATHS

*« Chers élèves, ces petits tests) de ± **30 minutes** visent davantage à vous aider par la suite et à prendre conscience de certaines choses, qu'à vous embêter. Prenez-les le plus possible comme un jeu, des révisions ou un autotest que comme une évaluation. Ils ne seront d'ailleurs **absolument pas** **notés**, mais, puisque la correction vous sera fournie ultérieurement, il vous serait bon de garder l'énoncé. Ceci étant dit et parce qu'ils m'aideront à écrire mon mémoire de fin d'études, je vous prie de les effectuer avec sérieux. Merci à vous par avance de vous prêter à l'exercice. »*

Axel GUILLERMIN

Question 1. Dans l'image ci-dessous, repérer les vecteurs de **même norme** et les vecteurs de **même sens**.



Question 2. À partir de l'image ci-dessus, compléter la relation suivante (plusieurs choix peuvent être possibles, n'en donner qu'un) :

$$\vec{v} + \vec{w} + \cdots = \vec{0}$$

Question 3. Toujours à partir de l'image ci-dessus donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GF}$ et $\vec{v}$ et calculer leurs normes. On rappelle que pour un vecteur $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Question 4. La forme générale d'une équation de droite dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est :

$$y = ax + b$$

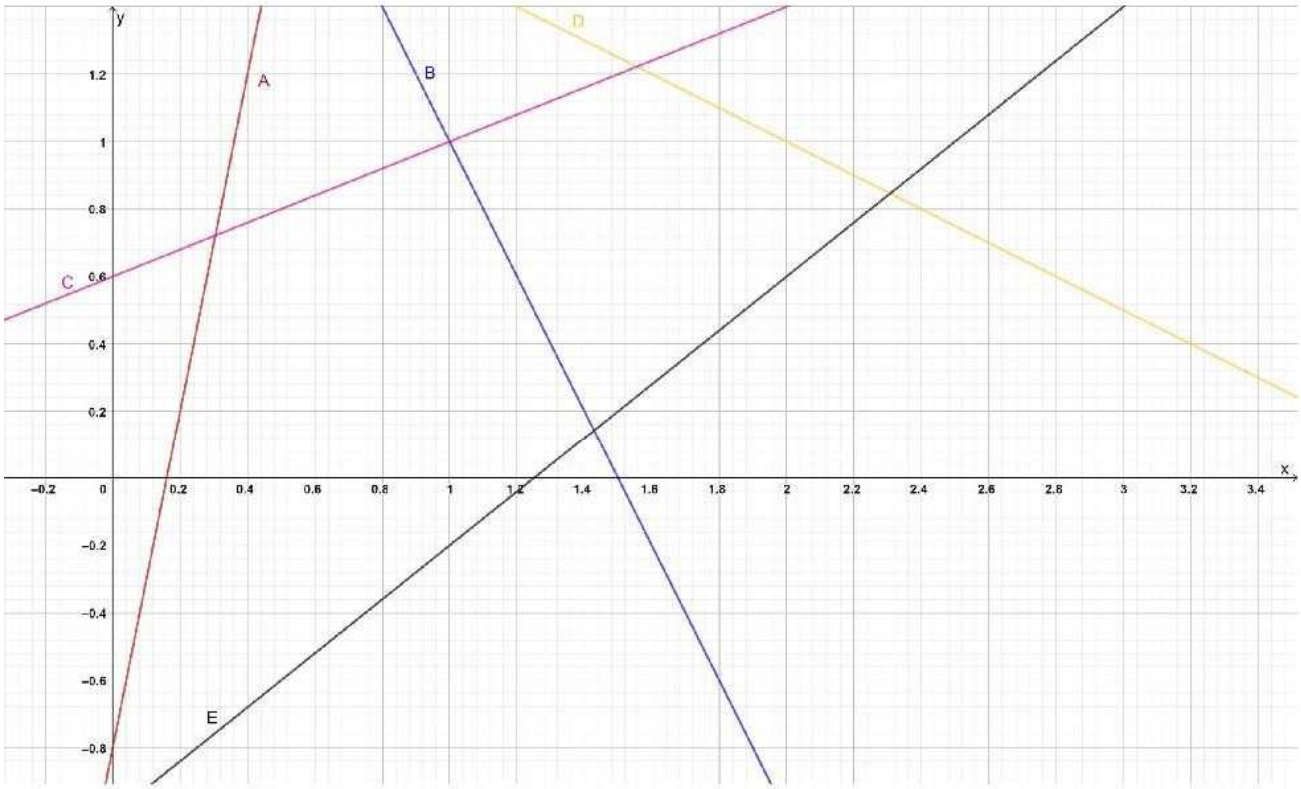
Comment appelle-t-on les nombres a et b ?

Figure 20 : Page 1 sur 2 du test de mathématiques

Question 5. Expliquer une méthode pour déterminer a.

Question 6. Quelle est la particularité des coordonnées $(x_K; y_K)$ d'un point K qui serait le point d'intersection entre une droite et l'axe des ordonnées, relativement aux nombres a et b ? On rappelle : $y = ax + b$

Question 7. Donner les équations des droites A, B, C, D et E représentées ci-dessous



Question 8. Parmi les deux situations ci-dessous, laquelle ou lesquelles est/sont proportionnelle(s) ? Justifier avec vos mots.

x	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
y	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5	25

x'	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
y'	0	3	6	7	9	13	15	18,5	19,5	23,5	25

Figure 21 : Page 2 sur 2 du test de mathématiques

Correction disponible dans la version numérique accessible sur le site de l'ENSFEA: **http://physiquechimie-ea.ensfea.fr**

TEST N°1 : MATHS — CORRECTION

Question 1.

Les vecteurs de même normes sont :

- $\overrightarrow{AB}$; $\vec{k}$; $\vec{w}$
- $\vec{c}$; $\vec{p}$; $\overrightarrow{LM}$
- $\overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{HI}$

Les vecteurs de même sens sont :

- $\overrightarrow{AB}$; $\vec{k}$
- $\vec{c}$; $\vec{p}$

Question 2.

Plusieurs réponses possibles :

$$\vec{v} + \vec{w} \begin{matrix} +2\vec{c} \\ +2\vec{p} \\ -2\overrightarrow{LM} \end{matrix} = \vec{0}$$

Question 3.

$\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} x_F - x_G \\ y_F - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{GF}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Question 4.

a est le coefficient directeur. b est l'ordonnée à l'origine.

Question 5.

On prend deux points A et B de la droite, choisis astucieusement avec $x_B > x_A$ puis $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Figure 22 : Correction page 1 sur 2 du test de mathématiques

Question 6.

Pour ce point particulier K, il se trouve que $x_K = 0$ et $y_K = b$

Question 7.

Droite A : $y = 5x - 0.8$

Droite B : $y = -2x + 3$

Droite C : $y = 0.4x + 0.6$

Droite D : $y = -0.5x + 2$

Droite E : $y = 0.8x - 1$

Exemple de méthode pour la équation de droite B :

Puisque l'on ne connaît pas l'ordonnée à l'origine b, il faut utiliser la propriété vue à la question 6.

Prenons le point $M(1; 1)$ et le point $K(0; b)$. On sait que $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Donc

$$-2 = \frac{1 - b}{1 - 0} \Leftrightarrow 1 - b = -2 \Leftrightarrow b = 3$$

Question 8.

La première situation est proportionnelle. Le facteur de proportionnalité vaut $\frac{2.5}{50} = \frac{5}{100} = 0.05$

La deuxième situation n'est pas proportionnelle. Il n'y a pas de facteur de proportionnalité entre x' et y'.

Figure 23 : Correction page 2 sur 2 du test de mathématiques

Enseignant(e)(s) de Physique :
Enseignant(e)(s) de Maths :
Classe :

TEST N°2 : PHYSIQUE

*« Chers élèves, ces petits tests de ± **30 minutes** visent davantage à vous aider par la suite et à prendre conscience de certaines choses, qu'à vous embêter. Prenez-les le plus possible comme un jeu, des révisions ou un autotest que comme une évaluation. Ils ne seront d'ailleurs **absolument pas** **notés**, mais, puisque la correction détaillée vous sera fournie ultérieurement, il vous serait bon de garder l'énoncé. Ceci étant dit et parce qu'ils m'aideront à écrire mon mémoire de fin d'études, je vous prie de les effectuer avec sérieux. Merci à vous par avance de vous prêter à l'exercice. »*

Axel GUILLERMIN

Question 1. Imaginons une voiture garée dans une pente. La voiture est immobile. Pour simplifier, la voiture est soumise à 3 forces : le poids $\vec{P}$, la réaction de la route $\vec{R}$ et une force liée au frein à main $\vec{F}$. Pour que la voiture reste immobile, il faut que :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

Représenter $\vec{F}$ à l'aide de votre règle en partant du centre de gravité G de la voiture.

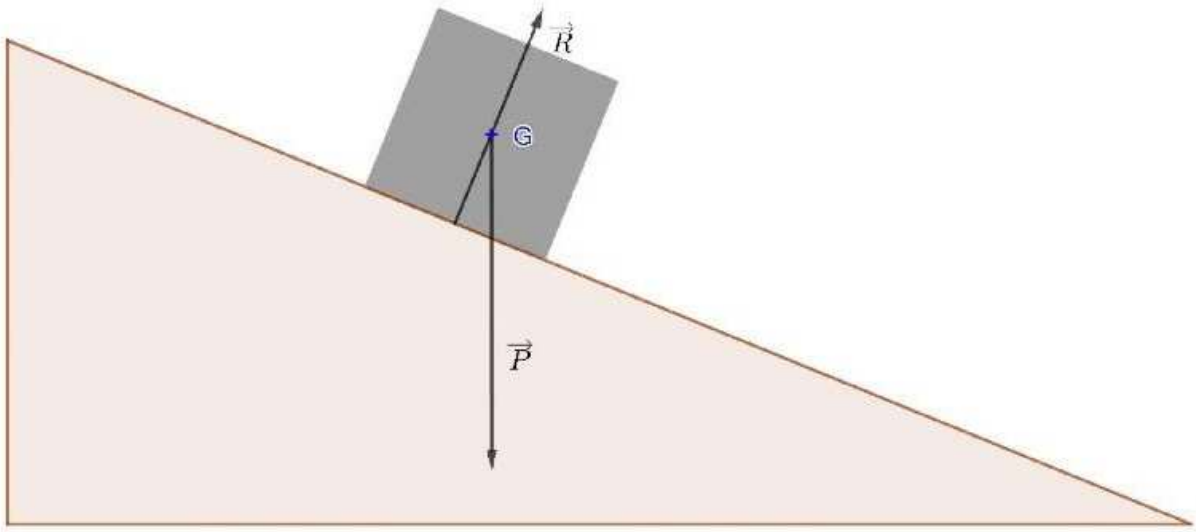
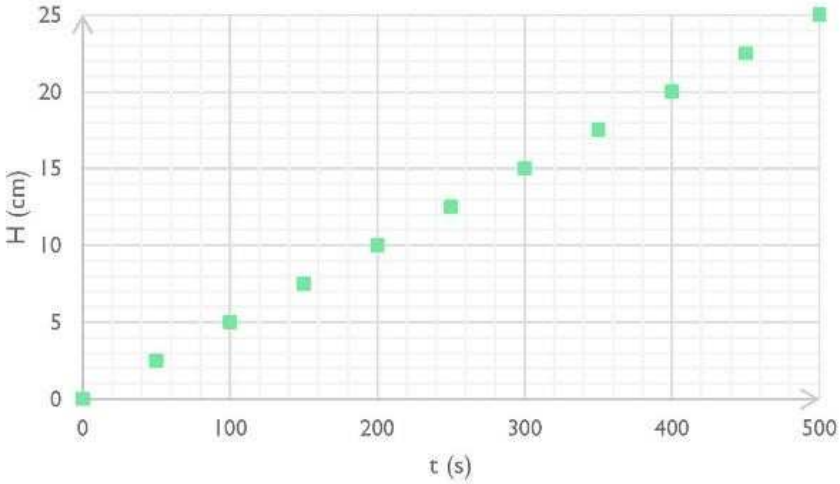


Figure 24 : Page 1 sur 3 du test de physique

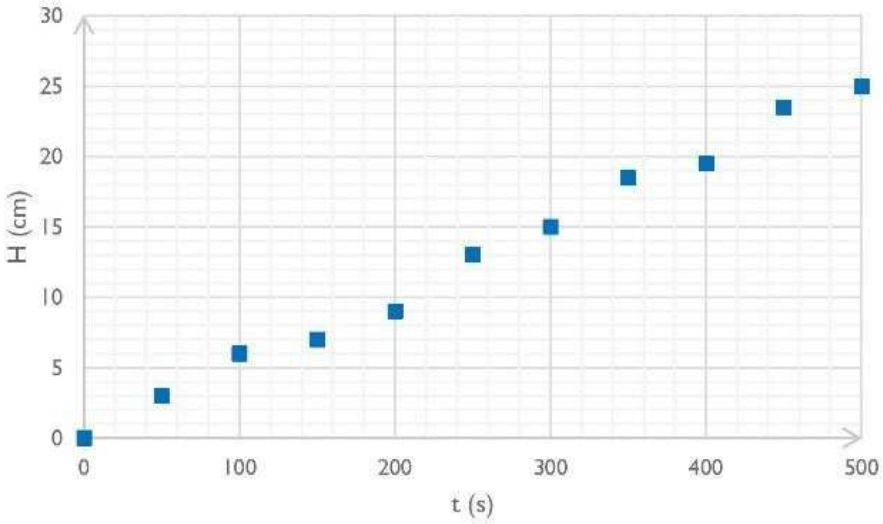
Question 2. Un sablier est formé de deux cylindres de hauteur $25\ cm$ reliés par un petit tube. Morgane a tracé la hauteur H en cm du sable écoulé en fonction du temps t en $secondes$ à partir du moment où l'on retourne le sablier.



La hauteur de sable écoulé est-elle proportionnelle au temps ? Justifier avec vos mots.

Question 3. Si cela est proportionnel, déterminer le coefficient de proportionnalité.
Exprimer H en fonction de t sous la forme $H = a \times t$

Question 4. En remplaçant le sable par de l'eau, on obtient une clepsydre. Morgane obtient alors la courbe ci-dessous.



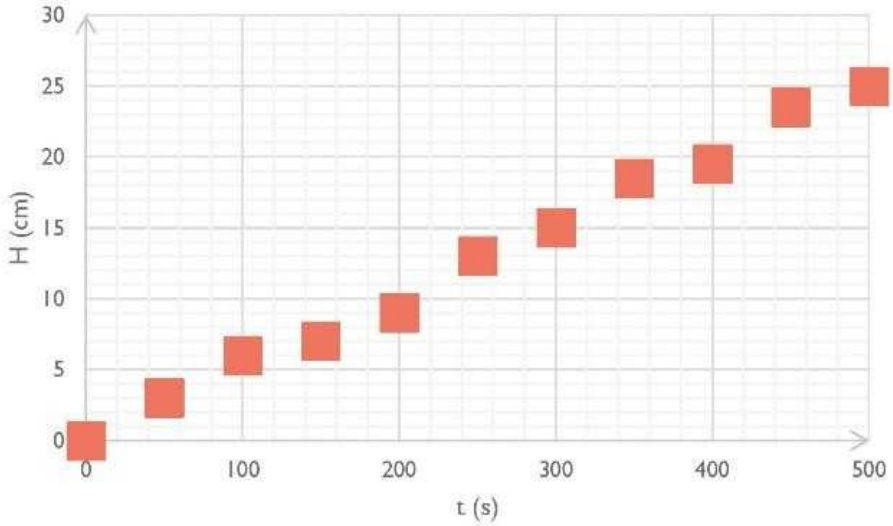
Morgane estime que hauteur d'eau écoulée est proportionnelle au temps.

Pauline a obtenu la même chose que Morgane et estime qu'il n'y a pas proportionnalité.

Êtes-vous d'accord avec Morgane ou avec Pauline ? Justifier avec vos mots.

Figure 25 : Page 2 sur 3 du test de physique

Question 5. Ivana a elle aussi reporté les mêmes informations concernant la clepsydre mais avec un stylo qui a une pointe très épaisse et voici ce qu'elle a obtenu :



Peut-on tracer une droite qui passe par l'origine et par tous ces *gros* points ?

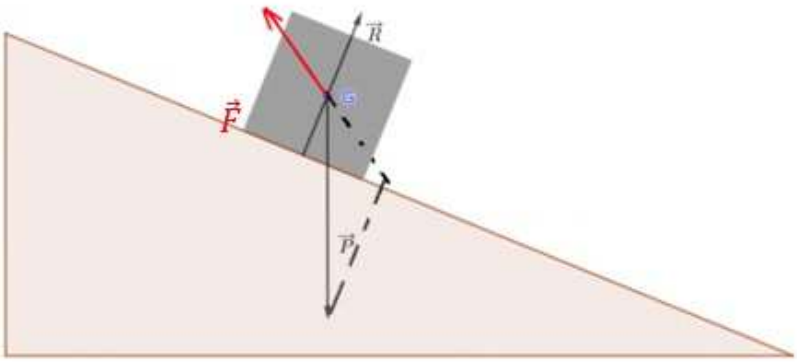
Tracez ce qu'il vous semble bon de tracer.

La hauteur d'eau écoulée est-elle proportionnelle au temps ? Justifier avec vos mots.

Figure 26 : Page 3 sur 3 du test de physique

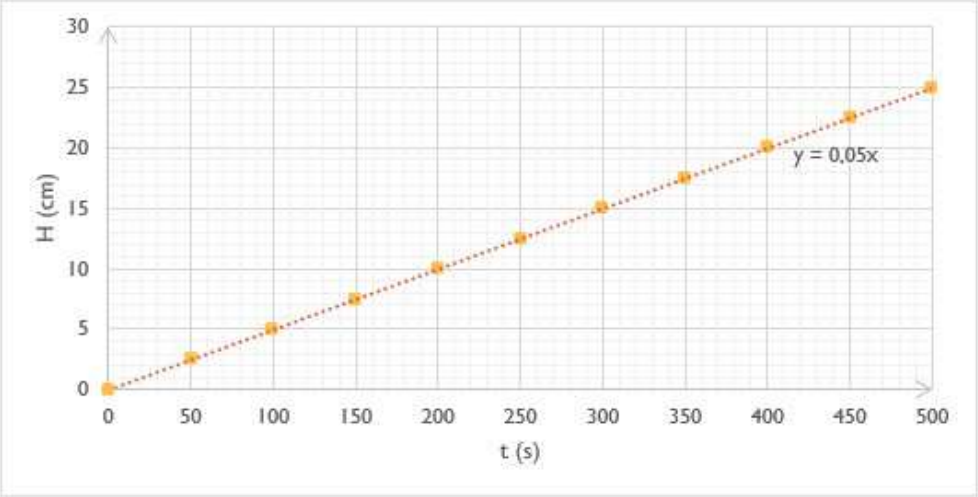
TEST N°2 : PHYSIQUE — CORRECTION

Question 1.



Question 2.

La hauteur de sable est proportionnelle au temps. On peut tracer une régression linéaire qui passe par l'origine.



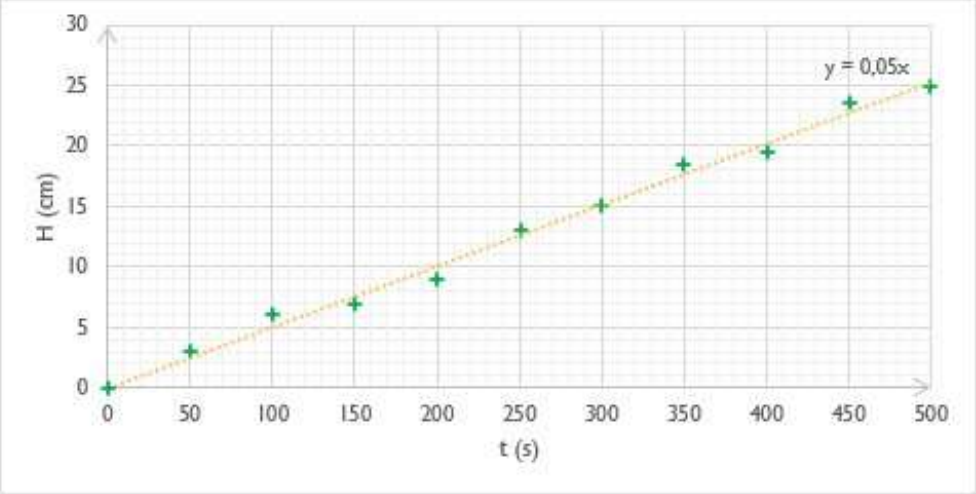
Question 3.

Comme cela figure sur le graphique ci-dessus, $a = 0.05$. (Attention, il peut être demandé de préciser l'unité de ce coefficient ! Ici, a s'exprime en $cm.s^{-1}$) $H = 0.005t$

Figure 27 : Correction du test de physique page 1 sur 2

Question 4. Question 5.

Morgane a raison du point de vue d'un physicien. En effet, il est également possible de tracer une régression linéaire qui passe par l'origine.



Bien que les points ne se trouvent pas tous rigoureusement sur la droite, en physique nous pouvons considérer cette situation proportionnelle. Le graphique obtenu par Ivana avec les gros points servait à matérialiser ce que l'on appelle les **incertitudes de mesure**. En physique et en chimie, dès qu'une grandeur est mesurée expérimentalement, la valeur trouvée est obligatoirement entachée d'une incertitude. Pour notre exemple, c'est l'épaisseur du trait d'Ivana qui traduit cette incertitude. Dans les faits, ce décalage avec la proportionnalité « parfaite » du point de vue mathématique peut s'explique via beaucoup de sources d'incertitudes. Pour notre clepsydre par exemple, cela peut provenir de l'erreur humaine de mesure de la hauteur, de l'imprécision de l'instrument de mesure de cette hauteur, du relevé fait par l'expérimentateur du temps écoulé, de l'imprécision du chronomètre,… Les points expérimentaux obtenus pour le sable dans le cas du sablier sont faussés et manipulés de telle sorte à ce que les points soient parfaitement alignés. Les valeurs expérimentales relevées pour le sablier et la clepsydre correspondent exactement aux données indiquées dans les deux tableaux du test de mathématiques !

Ces tests visaient à vous faire prendre conscience des différences entre ce qui est attendu de vous en mathématiques et en physique-chimie, bien que la physique-chimie utilise les mêmes outils que les mathématiques.

Merci encore à vous tous d'avoir joué le jeu de ces tests. Certaines de vos productions seront citées en l'état et commentées en vue de mon mémoire de fin d'études supérieures. Bien entendu, vous resterez anonymes aux yeux de celles et ceux qui liront mon mémoire.

Bonne continuation à vous tous. »

Axel GUILLERMIN

Figure 28 : Correction du test de physique page 2 sur 2

X. Travaux cités

Bengloan, J.-Y., & Nichele, R. (2012). *Réflexion sur les obstacles liés à la transposition didactiques en physique.* Lausanne.

Cohen, E. R., Cvitaš, T., Frey, J. G., Holmström, B., Kuchitsu, K., Marquardt, R., . . . Thor, A. J. (2007). *Quantities, Units, and Symbols in Physical Chemistry, IUPAC Green Book* (éd. 3rd). North Carolina, USA: RSC Publishing. doi:https://doi.org/10.1039/9781847557889

Colet, R., & Mary, N. (1993). *Pluridisciplinarité, interdisciplinarité, transdisciplinarité : quelles perspectives en éducation ? Etude du discours des professeurs de la Section des sciences de l'éducation de l'Université de Genève.* Genève.

Khan Academy. (2015, juillet 17). *Signification du signe égal.* Récupéré sur youtube.com: https://youtu.be/Ed1bep8r-Do

MENESR/DGESO. (2014). *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3 ; bac+3].* Éduscol.

Redish, E. F., & Kuo, E. (2015, March 14). *Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology.*